බහුපද ශ්‍රිත / ශේෂ ප්‍රමේය/සාධක ප්‍රමේය

Polynomials / Remainder Theorem / Factor Theorem

Ruwan Darshana
B.Sc. (Hons)

01. සංස්ලේෂ බෙදීම මගින් ශේෂයන් සොයන්න. [නව නිර්දේශයට අයත් නොවේ.]

(i) $2x^3 + 5x^2 - 3x + 13 \div (x-1)$
(ii) $x^4 + 7x^3 + 2 \div (x+1)$
(iii) $5x^3 + 8x^2 + 9 \div (x-2)$
(iv) $x^3 + 2x^2 + 1 \div (x+3)$
(v) $20x^3 + 40x^2 + 50 \div (2x-1)$
(vi) $8x^3 + 24x + 7 \div (2x+1)$
(vii) $81x^3 + 27x^2 + 60x + 2 \div (3x-1)$

02. ශේෂ ප්‍රමේය මගින් ශේෂය සොයන්න.

(i) $x^3 + 5x^2 + 12$; $(x-1)$ න්
(ii) $x^4 + 9x^2 + 10x + 5$; $(x+1)$ න්
(iii) $x^5 + 2x^3 + 7x + 5$; $(x-2)$ න්
(iv) $2x^3 - 4x + 1$; $(x-3)$ න්
(v) $16x^2 + 20x + 1$; $(2x-1)$ න්
(vi) $100x^2 + 40x + 3$; $(4x-1)$ න්
(vii) $f(x)$; $(x-2)$ න්
(viii) $f(x)$; $(x-\alpha)$ න්
(ix) $g(x)$; $(x+3)$ න්
(x) $R(x)$; $(x+1)$ න්

03. (i) $2x^3 + 5x^2 + kx + 12$; $(x+2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 20 ක් නම්, k සොයන්න.

(ii) $x^3 + 5x^2 + ax + b$; $(x-1), (x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයන් 9, 29 වේ. a, b සොයන්න.

(iii) $x^3 + ax^2 + bx + c$ ප්‍රකාශනය $(x-1), (x+1), (x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයන් පිළිවෙලින් 0, −2, 3 වේ. a, b, c සොයන්න.

(iv) $(x+1)$ න් $2x^3 + kx^2 - 5x + 6$ බෙදූ විට ශේෂය 5 වන සේ k සොයන්න.

(v) a, b නියත ද, $b \neq 0$ ද නම්, $f(x) = x^2 + ax + b$ වේ. $f(x)$; $(x-b)$ වලින් බෙදූ විට ශේෂයත්, $(x-2b)$ වලින් බෙදූ විට ශේෂයත් සමාන නම්, b ට තිබිය හැකි අගයන් සොයන්න.

04. (i) $5x^3 + 9x^2 + kx + 12$ හි $(x-2)$ සාධකයක් නම් k සොයන්න.

(ii) $x^2 - kx - (k^2 - 1)$ හි $(x+2)$ සාධකයක් වන සේ k සොයන්න.

(iii) $x - 3$ යනු $x^2 - (2a+1)x + 2b$ හිත්, $x^2 - (b+2)x + 5a$ හිත් පොදු සාධකයක් නම් a සහ b සොයන්න.

(iv) $(x-2)$ යනු $x^4 + 5x^2 + 7$ ප්‍රකාශනයේ සාධකයක් නොවන බව පෙන්වන්න.

(v) $(x - a - b)$ යනු $x^3 - 3abx - (a^3 + b^3)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

05. (i) $f(x)$; $(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 20 ක් වේ. $g(x)$; $4f(x) + 20$ වේ. $g(x)$; $(x-2)$ න් බෙදූවිට ශේෂය සොයන්න.

(ii) $f(x)$, $(x-1)$, $(x+1)$, $(x-5)$ න් බෙදූ විට ශේෂයන් පිළිවෙලින් 10, −3, −8 වේ. $g(x) = xf(x) + 5$ ද, $h(x) = x^2 f(x) + 9x + 1$ ද $R(x) = 2f(x) - 10$ ද වේ. $g(x)$; $(x-1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

22
22

REVISION

COMBINED MATHS

ADVANCED LEVEL EXAMINATION

REMAINDER THEOREM

REMAINDER THEOREM IS AN APPROACH OF EUCLIDEAN DIVISION OF POLYNOMIALS. ACCORDING TO THIS THEOREM, IF WE DIVIDE A POLYNOMIAL P(X) BY A FACTOR (X - A), THAT ISN'T ESSENTIALLY AN ELEMENT OF THE POLYNOMIAL; YOU WILL FIND A SMALLER POLYNOMIAL ALONG WITH A REMAINDER.

රුවන් දර්ශන
B.Sc Hon's
(Univercity of Colombo)

(ii) සාධක ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.
$f(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ බහුපද ශ්‍රිතයකි. $(x+1)$ සාධකයක් වන අතර, $f(x)$ බහුපදය $(x-1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය -8 වේ. a හා b නියත සොයන්න. ප්‍රකාශනයේ සම්පූර්ණ සාධක සොයන්න.

$\dfrac{6x^3 + 5x^2 - 7}{3x^2 + 2x}$ භින්න භාග වලට වෙන් කරන්න.

74. ශේෂ ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.
$f(x) = 2x^4 + 3x^3 + ax^2 + bx + c$ බහුපදය $(x-2)(x+3)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $-5x + 2$ වේ. $6a = -64 - c = 6b$ බව පෙන්වන්න. එම බහුපදය $(x-1)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය a පමණක් ඇසුරෙන් සොයන්න.

75. $ax^5 - 2x^3 + x^2 + b \equiv (x^2 - 1) f(x) - x - 2$ බව දී ඇත. මෙහි a හා b නියත ද, $f(x)$ බහු පදයක් ද වේ. a හා b අගයන්න. $f(x)$ බහුපදය $x + 2$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

76. $(x + y)^3$ ප්‍රසාරණය කරන්න. එනයින් $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ සාධකවලට වෙන් කරන්න.
$(a - b)^3\ (b - c)^3\ (c - a)^3$
$(a + b)^3\ (a - b)^3 + (b + c)^3\ (b - c)^3 + (c + a)^3\ (c - a)^3$
ප්‍රකාශනවල සාධක වෙන් කිරීමට ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතා කරන්න. $k\ (\neq 1)$ නියතයක් විට $k(x + 2)^2 - (x - 1)(x - 2)$ නම් ප්‍රකාශය x හි එක් අගයක් සඳහා පමණක් ශූන්‍ය වේ නම්, k හි අගය සොයන්න. එය අවම අගයක් ගන්නේ නම්, k හි තිබිය යුතු පරාසය සොයන්න.

77. (i) $P(x)$ බහුපදය $(x - 1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 2 වන අතර, $(x - 2)$ බෙදූ විට ශේෂය 3 වේ. $P(x)$ $(x - 1)(x - 2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය $ax + b$ වේ. a, b සොයන්න. තවද $P(x)$ බහුපදය 3 මාත්‍රයේ වන අතර, x^3 හි සංගුණකය 1 බව දී ඇත. -1 යනු $P(x) = 0$ සමීකරණයේ මූලයක් ද නම්, $P(x)$ බහුපදය සොයා, $P(x) = 0$ සමීකරණයට වෙනත් තාත්ත්වික මූල නැති බව පෙන්වන්න.
(ii) $(x + y + z)^3 - (y + z - x)^3 - (z + x - y)^3 - (x + y - z)^3$ සාධක සොයන්න.

78. $x^3 + px^2 + q$ හා $ax^3 + bx + c$ යන දෙකට $x + 1$ පොදු සාධකයක් නම් එය $apx^2 - bx + aq - c$ හි ද සාධකයක් වන බව පෙන්වන්න. $x^3 + \sqrt{7}x^2 - 14\sqrt{7}$ හා $2x^3 - 13x - \sqrt{7}$ යන බහුපද දෙකට පොදු සාධකයක් ඇති බව පෙන්වන්න. $2x^3 - 13x - \sqrt{7} = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

79. $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$ ප්‍රකාශනය ඒකජ සාධක 3 ක ගුණිතයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න. එනයින් $3e^{3x} - 4e^{2x} - 5e^x + 2 = 0, \quad x \in R$ සමීකරණයේ විසඳුම් සොයන්න.

80. $f(x)$ ශ්‍රිතයට පුනරාවර්තන සාධකයක් ඇත්නම්, එම සාධකය $f^1(x)$ වල සාධකයක් බව පෙන්වන්න.
$x^3 - 5x^2 + 7$, $(x - 1)^2$ න් බදූ විට ශේෂය සොයන්න.

81. $[x-(P+Q)]$ යනු $x^3-3PQx-(P^3+Q^3)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. එනයින් $x^3-6x-6=0$ හි තාත්ත්වික මූලයන් සොයන්න.

82. x^2+2 යනු x^4-6x^2+p හි සාධකයකි. p නියතය සොයන්න. එනයින් x^4-6x^2+p හි සාධක සොයන්න.

83. m, n නිඛිලව සිටියද්දී x^m+nx, x^2-x-2 වලින් බෙදෙන විට ලැබෙන ශේෂය $2x+6$ නම් m, n සොයන්න.

පසුගිය විභාග ගැටළු

84. c හා d තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. ($c\neq 0$)
$f(x)=x^3+4x^2+cx+d$ වේ. $(x+2)$ මගින්, $f(x)$ බෙදූවිට ශේෂය $-c^3$ වේ. තවද $(x-2)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් වේ. $c=-2$ සහ $d=-12$ බව පෙන්වන්න.

[2018 A/L]

85. $g(x)=x^3+px^2+qx+1$ යැයි ගනිමු. මෙහි $p, q\in\mathbb{R}$ වේ. $(x-1)(x+2)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $3x+2$ වේ. $(x-1)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය 5 බව හා $(x+2)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය -4 බව පෙන්වන්න. p හා q හි අගයන් සොයා $(x+1)$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. **[2017 A/L]**

86. $p(x)=x^3+2x^2+3x-1$ හා $q(x)=x^2+3x+6$ යැයි ගනිමු. ශේෂ ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්, $p(x)$ යන්න $(x-1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂයත්, $q(x)$ යන්න $(x-2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂයත් සොයන්න. $p(x)=(x-1)\,q(x)+5$ බව සත්‍යාපනය කර, $p(x)$ යන්න $(x-1)(x-2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න. **[2016 A/L]**

87. (i) $f(x)\equiv 2x^4+\gamma x^3+\delta x+1$ යැයි ගනිමු. මෙහි γ හා δ තාත්ත්වික නියත වේ.
$f(-\frac{1}{2})=0$ හා $f(-2)=21$ බව දී ඇති විට, $f(x)$ හි තාත්ත්වික ඒකජ සාධක දෙක සොයන්න.

(ii) සියලුම තාත්ත්වික x සඳහා $(x^2+x+1)\,p(x)+(x^2-1)\,Q(x)=3x$ සමීකරණය සපුරාලන $P(x)$ හා $Q(x)$ ඒකජ ප්‍රකාශන දෙක සොයන්න. **[2015 A/L]**

88. $a \in \mathrm{R}$ යැයි ද $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + ax - 1$ යැයි ද ගනිමු. $(3x-1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බව දී ඇත. a හි අගය සොයන්න. $f(x)$ යන්න $(3x-1)(x+\mathrm{k})^2$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි k යනු නියතයකි. ඉහත ප්‍රකාශනයෙහි $3x-1$ යන්න b හා c නියත වන $\mathrm{b}(x+1)+\mathrm{c}$ ආකාරයෙන් ලිවීමෙන් $f(x)$ යන්න $(x+1)^3$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න. **[2014 A/L]**

89. $f(x) = ax^3 + \mathrm{b}x^2 - 11x + 6$ යැයි ගනිමු. මෙහි $a, \mathrm{b} \in \mathrm{R}$ වේ. $(x-1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් වේ නම් හා $f(x)$ යන්න $(x-4)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය -6 නම් a හා b වල අගයන් සොයන්න. $f(x)$ හි අනෙක් ඒකජ සාධක දෙකත් සොයන්න. **[2013 A/L]**

90. $g(x) \equiv x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2$ යැයි ගනිමු. ශේෂ ප්‍රමේයය නැවත නැවත යොදා ගනිමින් $(x+1)^2$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. $g(x)$ යන්න $(x-a)^2\ (x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c})$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a, b හා c යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වෙයි. x හි සියලු තාත්ත්වික අගයන් සඳහා $g(x) \geq 0$ බව අපෝහනය කරන්න. **[2012 A/L]**

91. $f(x) = x^3 - 3a\mathrm{b}x - ax - (a^3 + \mathrm{b}^3)$ යැයි ගනිමු. a හා b තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. $(x - a - \mathrm{b})$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. $f(x)$ හි අනෙක් සාධකය වර්ගජ ආකාරයෙන් සොයන්න. එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ a හා b ප්‍රභින්න නම් $f(x) = 0$ ට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් තිබෙන බව පෙන්වන්න. $x^3 - 9x - 12 = 0$ ට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් තිබෙන බව අපෝහනය කර එය සොයන්න. **[2011 A/L]**

92. $f(x)$ බහුපදය $x - \alpha$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $f(\alpha)$ බව පෙන්වන්න. $f(x)$ බහුපදය $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $\mathrm{A}(x-\beta)(x-\gamma) + \mathrm{B}(x-\alpha)(x-\gamma) + \mathrm{C}(x-\alpha)(x-\beta)$ ආකාරය ගනී. මෙහි α, β සහ γ සමාන නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. $\alpha, \beta, \gamma, f(\alpha), f(\beta)$ සහ $f(\gamma)$ ඇසුරෙන් A, B, C නියත ප්‍රකාශ කරන්න. එනයින්, $x^5 - \mathrm{k}x$ යන්න $(x+1)(x-1)(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයේ x හි පදය අඩංගු නොවන ලෙස k නියතයේ අගය සොයන්න. **[2009 A/L]**

93. $f(x)$ බහුපදය $(x-\alpha)$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $f(\alpha)$ බව පෙන්වන්න. $f(x)$ බහුපදය $(x-\alpha)(x-\beta)$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $\mathrm{A}x + \mathrm{B}$ ආකාරය ගනී. මෙහි $\alpha \neq \beta$ වේ. $\alpha, \beta, f(\alpha)$ සහ $f(\beta)$ ඇසුරෙන් A හා B නියත ප්‍රකාශ කරන්න. එනයින්, $x^3 + \mathrm{k}x^2 + \mathrm{k}$ යන්න $(x-1)(x+2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයේ නියත පදය අඩංගු නොවන ලෙස k නියතයේ අගය සොයන්න. **[2008 A/L]**

94. $f(x)$ යනු මාත්‍රය 3 ට වැඩි x හි බහු පදයකි. පිළිවෙලින් $(x-1)$, $(x-2)$ හා $(x-3)$ යන්නෙන් $f(x)$ බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය a, b හා c වේ. ශේෂ ප්‍රමේයය නැවත නැවත යෙදීමෙන් $(x-1)(x-2)(x-3)$ යන්නෙන් $f(x)$ බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය, $\lambda(x-1)(x-2) + \mu(x-1) + 2$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි λ, μ හා x යනු නියත වේ. a, b හා c ඇසුරෙන් λ, μ හා x සොයන්න. **[2007 A/L]**

95. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ සාධක සොයන්න.

[2006 A/L]

96. $P(x) = ax^3 + bx + c$ යන්න $(x+1)$ න්, $(x-1)$ න් හා $(x-2)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂ පිළිවෙලින් 4, 0 හා 4 වේ. a, b, c හි අගයන් සොයා $P(x)$ හි ඒකජ සාධක සියල්ල නිර්ණය කරන්න.

[2005 A/L]

97. $P(x)$ වර්ගජ බහුපදයක් පිළිවෙලින් $(x-1)$, $(x-2)$ හා $(x-3)$ යන්නෙන් බෙදූ විට ශේෂයන් $1, \frac{1}{2}$ හා $\frac{1}{3}$ වේ. $(x-1)$, $(x-2)$ හා $(x-3)$ යනු $Q(x) = xp(x) - 1$ මගින් දෙනු ලබන $Q(x)$ බහුපදයේ සාධක බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් $Q(x)$ සොයන්න.

[2004 A/L]

98. $f(x, y) = 2x^2 + \lambda xy + 3y^2 - 5y - 2$ ප්‍රකාශනය රේඛීය සාධක දෙකක ගුණිතයක් ලෙස පවතින λ හි අගයන් සොයන්න.

[2000A/L]

99. $x(y^4 - z^4) + y(z^4 - x^4) + z(x^4 - y^4)$ හි සාධක සොයන්න. *[1999 A/L]*

100. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ හි සාධක සොයන්න. ප්‍රභින්න p, q, r සඳහා $x^3 + y^3 + z^3 = 3(p-q)(q-r)(r-p)$ සහ $px + qy + rz = 0$ ද $x + y + z = 0$ නම්, $x = q - r$, $y = r - p$ සහ $x = p - q$ බව පෙන්වන්න.

[1998 A/L]

101.(a) $f(a, b, c) \equiv (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ හි සාධක සොයන්න. $f(a, b, c)$ යන්න $(a+b+c)^{1997} - a^{1997} - b^{1997} - c^{1997}$ හි සාධකයක් බව අපෝහනය කරන්න.

(b) $f(x)$ බහුපද ශ්‍රිතයක් වේ. $f(x) \equiv x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

(i) $x - 1$ හෝ $x + 1$ $f(x)$ හි සාධකයක් නොවන බව පෙන්වන්න.

(ii) $f(x)$, $x^2 - 1$ බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(iii) $f(x)$, $x^2 + 1$ න් බෙදූ විට ශේෂය 2 බව පෙන්වා, එමගින් $f(x) = 2$ හි එක් තාත්වික මූලයක් සොයන්න.

[1997 A/L]

102.(i) $(b+c)^3(b-c) + (c+a)^3(c-a) + (a+b)^3(a-b)$ සාධක සොයන්න.

(ii) p, q, r $(p \neq 0)$ යනු තාත්වික නියත විට $px^4 + qx^3 + rx^2 - qx + p = 0$ සමීකරණය y හි වර්ගජ සමීකරණයට ඌනනය කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි $y = x -$ වේ. එනයින් ඉහත දක්වා ඇති සමීකරණයට තාත්වික මූල තිබීම සඳහා p, q, r මගින් සපුරාලිය යුතු අවශ්‍යතාවයක් සොයන්න.

$(x-2)^3$ *[1996 A/L]*

103.(i) $t = x + \frac{1}{x}$ යැයි ලියමින් $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ යන සමීකරණයේ මූල සියල්ලම සොයන්න.

(ii) $E = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x + 7 = 0$ යයි ගනිමු. $y^2 + y + a$ ආකාරයෙන් E ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි a නියතයක් ද, y යන්න b හා c නියත වන $x^4 + bx + c$ ආකාරයෙන් ද වේ. එනයින් සියලු තාත්ත්වික x සඳහා $E > 3$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $\frac{1}{(x-2)(x-1)^3} = \frac{k}{x-2} + \frac{f(x)}{(x-1)^3}$ වන සේ k නියතයක් සහ x හි ශ්‍රිතයක් වන f සොයන්න. $x - 1$ හි බහුපදයක් ලෙස $f(x)$ ප්‍රකාශ කරන්න. එනයින්

හි භින්න භාග සොයන්න.

[1992 A/L]

104. ඒකජ සාධක දෙකක් ලබා ගැනීමෙන් $(a - x)^4 + (x - 1)^4 - (a - 1)^4$ ප්‍රකාශනයේ සාධක සොයන්න.

[1993 A/L]

105. (i) $f(x, y, z) \equiv x^4(y - z) + y^4(z - x) - z^4(x - y)$ හි සාධකයක් $(x - y)$ බව පෙන්වන්න. එනයින් ප්‍රකාශනය පූර්ණ ලෙස සාධකවලට ඛණ්ඩනය කරන්න. x, y, z වූ කලී ඒවායෙන් කිසිම දෙකක් එකිනෙකට සමාන නොවන පරිදි වූ තාත්ත්වික සංඛ්‍යා නම් $f(x, y, z)$ ශූන්‍ය විය නොහැකි බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) $ax^3 + bx + c$ ප්‍රකාශනයට $x^2 + k + 1$ ආකාරයේ සාධකයක් ඇත්නම් $a^2 - c^2 = ab$ බව පෙන්වන්න. මෙම අවස්ථාවෙහි දී $ax + bx + c$ සහ $cx^3 + bx^2 + a$ ප්‍රකාශනවලට පොදු වර්ගජ සාධකයක් තිබෙන බව අපෝහනය කරන්න.

[1991 A/L]

106. (i) $f(x) = x^4 - bx^3 - 11x^2 + 4(b + 1)x + a$, මෙහි a සහ b නියත වේ.

I. $f(x)$ වර්ග ප්‍රකාශනයක පරිපූර්ණ වර්ගයක් බව ද

II. $x + 2$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් බව ද දී ඇත. a සහ b සොයා $f(x)$ හි සාධක සියල්ල සොයන්න.

(ii) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ හි සාධක සොයන්න. ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $(a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 (c + a - b)^3 - (a + b - c)^3 = 24abc$ බව සාධනය කරන්න.

[1990 A/L]

107. (i) $f(x) \equiv 2x^4 + (3k - 4)x^3 + (2k^2 - 5k - 5)x^2 + (2k^3 - 2k^2 - 3k - 6)x + 6$ හි $x^2 - k$ සාධකයක් වන පරිදි k හි අගයන් සොයන්න. k හි එක් එක් අගයට අනුරූප $f(x)$ හි ඉතිරි සාධක සොයන්න.

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = \frac{1}{2}[(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2]$ බව පෙන්වන්න. $x = b + c - a, y = c + a - b, z = a + b$ නම් $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ බව අපෝහනය කරන්න.

[1989 A/L]

108. $f(x, y, z) \equiv x(y^4 - z^4) + y(z^4 - x^4) + z(x^4 - y^4)$ යයි ගනිමු. $(x - y)(y - z)$ සහ $(z - x)$ යනු $f(x, y, z)$ සාධක බව පෙන්වන්න. එනයින් $f(x, y, z)$ සාධකවලට වෙන් කරන්න.

[1986 A/L]

109. (i) $f(x, y, z) \equiv (x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$ යයි ගනිමු. $(x + y), (y + z), (z + x)$ යනු $f(x, y, z)$ හි සාධක බව පෙන්වන්න. එනයින් $f(x, y, z)$ සාධක වලට වෙන් කරන්න.

(ii) $(x^2 - px + 1)$ යනු $ax^5 + bx^2 + c$ හි සාධකයක් නම්, එවිට, $(a^2 - c^2)(a^2 - c^2 + bc) = a^2b^2$ බව සාධනය කරන්න. මෙම අවශ්‍යතාව සපුරාලයි නම් එවිට, $(x^2 + px + 1)$ යන්න $cx^5 + bx^3 + a$ හි සාධකයක් ද බව පෙන්වන්න.

[1985 A/L]

110. (i) $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 \equiv 3(a - b)(b - c)(c - a)$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $f(x) \equiv px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$ වේ. $x^2 + a$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $(s - qa)x + pa^2 - ra + t$ බව පෙන්වන්න. α සහ $-\alpha$ යනු $f(x) = 0$ හි මූල නම් $ps^2 - qrs + q^2t = 0$ සම්බන්ධය p, q, r, s, t මගින් සපුරාලන බව සාධනය කරන්න.

[1984 A/L]

111. $x^2 + 1$ න් හරියටම බෙදෙන එහෙත් $(x - 1)^2(x - 2)$ න් බෙදූ විට $6x + 8$ ක ශේෂයක් ඉතිරිවන x හි සිව්වන මාත්‍රයේ බහුපදය සොයන්න.

[1983 A/L]

112. (i) $(x + y)^2(x + z)^2(y - z) + (y + z)^2(y + x)^2(z - x) + (z + x)^2(z + y)^2(x - y)$ යන්න තාත්ත්වික ඒකජ සාධක තුනකට සහ වර්ගජ සාධක එකකට සාධක කරන්න.

(ii) $x^8 + 2x^7 + ax^2 + bx + c$ ප්‍රකාශනය $x^2 + x - 2$ යන්නෙන් හරියටම බෙදිය හැක. ප්‍රකාශනය $x + 1$ යන්නෙන් බෙදූ විට -8 ක ශේෂයක් ඉතිරි වේ. a, b, c සොයන්න.

[1966 A/L]

113. (i) $2x^4 + x^3 - x^2 + ax + b$ යන්න $x^2 - 1$ න් බෙදූ විට ශේෂය $2x + 3$ වේ. a හා b වල අගයන් සොයන්න.

(ii) $(x, y, z) \equiv (y - z)^5 + (z - x)^5 + (x - y)^5$ සරල සාධක තුනක් සහ වර්ගජ සාධක එකක් ද වන සේ සාධක සොයන්න.

[1964 A/L]

h (x) ; $(x+1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
R (x) ; $(x-5)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(iii) $(x-1)$ යනු $f(x)$ වල $g(x)$ වල සාධකයක් වේ. h (x) ; $(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 5 ක් වේ. $R(x) = 2f(x) + 3g(x) + 4h(x)$ වේ. R (x) ; $(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(iv) $f(x)$; $(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 30 කි. $g(x) = xf(x) + 5$ වේ. $g(x)$; $(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

06. $P(x) = ax^3 + bx + c$ වේ. P (x), $(x+1)$, $(x+2)$, $(x+3)$ න් බෙදූ විට ශේෂයන් පිළිවෙලින් 12, 12, 0 වේ.

(i) a, b, c සොයන්න.
(ii) P (x) රේඛීය සාධකවලට වෙන් කරන්න.
(iii) P $(x) = 0$ විසඳන්න.
(iv) P (x) ධන වන x වල අගය පරාසය සොයන්න.

07. $f(x) = xp(x) + 1$ වේ. P (x) බහු පදය $(x-1)$, $(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයන් -1, $\frac{-1}{2}$ වේ. $(x-1)$, $(x-2)$ යනු $f(x)$ වල සාධක බව පෙන්වන්න.

08. (i) $(x-2)$ යනු $x^3 - 5x^2 + 4x + 4$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.
(ii) $(x+1)$ යනු $5x^7 + 6x^4 + 8x + 7$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.
(iii) $(x-1)$ යනු $x^2 + 4x - 5$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.
(iv) $(x-a)$ යනු $2x^3 - 5ax^2 + 7a^2x - 4a^3$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.
(v) $f(x) = 3x^3 + 9ax^2 + 20a^2x + 14a^3$ වේ. $(x+a)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

09. (i) $x^4 + 5x^3 + 1$ හි $(x-1)$ සාධකයක් නොවන බව පෙන්වන්න.
(ii) $7x^3 + 6x^2 + 2$ හි $(x+2)$ සාධකයක් නොවන බව පෙන්වන්න.
(iii) $f(x) = x^2 + 2x + 30$ වේ. a නියතයක් වන විට, $(x-a)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් නොවන බව පෙන්වන්න.

10. (i) $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$ හි $(x+1)$ සාධකයක් බව පෙන්වා, ඉතිරි සාධක සොයන්න.
(ii) $(x-1)$ යනු $x^3 + 4x^2 - x - 4$ හි සාධකයක් බව පෙන්වා, එනයින් ප්‍රකාශනය ඒකජ සාධකවලට වෙන් කරන්න.
(iii) $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$ වේ. $(x+1)$ සාධකයක් බව පෙන්වා, ඉතිරි සාධක සොයන්න. $f(x) = 0$ විසඳන්න.
(iv) $g(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$ වේ. $(2x-1)$ යනු $g(x)$ වල සාධකයක් බව පෙන්වා, ඉතිරි සාධක සොයන්න. $g(x) = 0$ විසඳන්න.

11. (i) $(x-a-b)$ යනු $x^3 - 3abx - (a^3 + b^3)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වා, ඉතිරි සාධක සොයන්න. $x^3 - 6x - 9 = 0$ විසඳන්න.

(ii) $(x-a-b-c)$ යනු $(x-a)(x-b)(x-c)-(a+b)(b+c)(c+a)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. $(x-1)(x-2)(x+4)-18=0$ විසඳන්න.

12. (a) සාධක ප්‍රමේයය ලියන්න.

(b) සාධක ප්‍රමේයයේ විලෝමය ලියන්න.

(c) පහත ඒවා සාධක වෙන් කරන්න.

(i) x^3+5x^2+2x-8 (ii) x^3+4x^2+7x+4

(iii) $2x^3+7x^2-5$ (iv) $x^4+7x^3+5x^2+1$

(v) x^3-2x-4 (vi) x^3-7x-6

(vii) $x^3-(5+a)x^2+(6+5a)x-6a$ (viii) $x^4-9ax^3+5a^2x^2-6a^3x+21a^4$

13. ශේෂ ප්‍රමේයයේ බෙදුම් ඇල්ගොරිතමය මඟින් ශේෂය සොයන්න.

(i) $x^4+5x^3+7x+2\,;\,(x^2-4)$ න් (ii) $x^5-6x^3+2\,;\,(x^2-x)$ න්

(iii) $x^3+8x^2+6x-1\,;\,(x^2+2x)$ න් (iv) $x^2+5x+2\,;\,(x^2-a^2)$ න්

(v) $x^5+7x^2+2x-1\,;\,x^2-x-2$ න්

14. (i) $x^4+3x^2+Px+Q\,;\,(x^2-1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය $6x-5$ නම්, P, Q සොයන්න.

(ii) $x^4+6x^3+\lambda x^2+\mu x+\gamma$ ප්‍රකාශනයේ x^3-x සාධකයක් නම්, λ, μ, γ සොයන්න.

15. ශේෂ ප්‍රමේයය සම්බන්ධ ප්‍රකාශනය මඟින් බෙදා ශේෂය සොයන්න. (බෙදුම් ඇල්ගොරිතමය භාවිතා කරන්න.)

(i) $f(x)$ බහු පදය (x^2-a^2) මඟින් බෙදූ විට ශේෂය,

$\frac{1}{2a}[f(a)-f(-a)]x+\frac{1}{2}[f(a)+f(-a)]$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $g(x)$ යනු 2 වෙනි හෝ ඊට වැඩි මාත්‍රයක බහුපද ශ්‍රිතයක් නම්, $g(x)\,;\,(x-a)(x-b)$ ගෙන්

බෙදූ විට ශේෂය $\left[\dfrac{g(a)-g(b)}{a-b}\right]x+\left[\dfrac{ag(b)-bg(a)}{a-b}\right]$ බව පෙන්වන්න.

16. (i) $P(x)$ නම් බහු පදය $(x-a)(x-b)$ ගෙන් බෙදූ විට ශේෂය $A(x-a)+B(x-b)$ ආකාර වේ. A, B සොයන්න.

(ii) $f(x)$ නම් බහුපදය $(x+1)(x+2)(x+3)$ න් බෙදූ විට ශේෂය,
$a(x+2)(x+3)+b(x+3)(x+1)+c(x+1)(x+2)$ වේ. $f(-1)$, $f(-2)$, $f(-3)$ ඇසුරෙන් a, b, c සොයන්න.

17. (i) x^5+kx^2+k ප්‍රකාශනය $(x-1)(x-2)(x-3)$ න් බෙදූ විට ශේෂයේ x^2 පද නොමැති නම් k සොයන්න.

(ii) $x^3 + kx^2 + 7k$ ප්‍රකාශනය $(x+1)(x+2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයේ නියත පදය නොමැති නම් k සොයන්න.

18. (i) $P(x)$ නම් බහු පදය $(x-a)(x-b)$ ගෙන් බෙදූ විට ශේෂය a, b, $P(a)$, $P(b)$ ඇසුරෙන් සොයන්න. එනයින් $x^5 - \lambda x^2 + 1$; $(x-1)(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයේ නියත පදය නොමැති නම්, λ සොයන්න.

(ii) $f(x)$ නම් බහුපද ශ්‍රිතය $(x-1)(x-2)(x-3)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය, $a(x-2)(x-3) + b(x-3)(x-1) + c(x-1)(x-2)$ වේ. a, b, c හි අගයන් $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ මගින් සොයන්න.
තවද, $x^5 + kx^2$, $(x-1)(x-2)(x-3)$ න් බෙදූ විට ශේෂයේ x^2 පද නොමැති නම්, k හි අගය අපෝහනය කරන්න.

19. (i) $x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 7x + 8$; $(x^2 + 2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(ii) $x^6 - 4x^5 + x^2 + x$; $(x^2 + 1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(iii) $x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 1$; $(x^2 - 5)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(iv) $16x^3 + 8x^2 - 12x + 9$; $(2x^2 + 1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(v) $27x^3 + 81x^2 + 4x + 1$; $(3x^2 - 1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(vi) $Px^3 + Qx^2 + Rx + S$; $(x^2 + K^2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(vii) $2x^3 + bx^2 + cx + 7$; $(x^2 + k^2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

20. (i) $7x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + 6$; $(x^2 + 1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය $5x - 2$ නම්, a, b සොයන්න.
(ii) $5x^4 - 2x^3 + Px^2 + Qx + 9$ ප්‍රකාශනයේ $(x^2 - 2)$ සාධකයක් නම්, P, Q සොයන්න.
(iii) $\lambda x^3 + 3x^2 - 5x + \mu$ ප්‍රකාශනයේ $x^2 + k^2$ සාධකයක් නම්, $\lambda\mu = -15$ බව පෙන්වන්න.

21. (i) $x^5 + 7x^4 - 6x^3 - 2x + 1$ ප්‍රකාශනය $(x^3 + 2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(ii) $7x^6 + 4x^5 - 5x^2 + x + 9$ ප්‍රකාශනය $(x^3 - 1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(iii) $(x^3 + 1)$ යනු $x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 - 7$ හි සාධකයක් නම්, a, b, c සොයන්න.

22. (i) $5x^3 + 7x^2 - 4x + 1$; $x^2 - 2x + 1$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(ii) $x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 8$; $x^2 - x + 1$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(iii) $2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - ax + b$ ප්‍රකාශනය $x^2 + x + 1$ න් බෙදේ නම් a, b සොයන්න.

23. (i) ශේෂ ප්‍රමේය නැවත නැවත යෙදීමෙන්, $(x-1)^2$ යනු $x^2 + x^2 - 5x + 3$ සාධකයක් බව පෙන්වන්න.
(ii) ශේෂ ප්‍රමේය නැවත, නැවත යෙදීමෙන් $(x+1)^2$ යනු $3x^3 + 7x^2 + 5x + 1$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

Ruwan Darshana

24. (i) $x^3 + 3x^2 + 7x + 5$; $(x-1)$ හි ශ්‍රිතයක් ලෙස ලියන්න.
(ii) $x^3 + 8x^2 + 10$; $(x+1)$ හි ශ්‍රිතයක් ලෙස ලියන්න.
(iii) $x^4 + 3x + 5$; $(x-2)$ හි ශ්‍රිතයක් ලෙස ලියන්න.

25. පහත සමීකරණ විසඳන්න.
(i) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$
(ii) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 11 = 0$
(iii) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$
(iv) $5x^4 - 11x^3 + 16x^2 - 11x + 5 = 0$

26. පහත සමීකරණ විසඳන්න.
(i) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$
(ii) $x^3 + 7x^2 + 6x = 0$
(iii) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
(iv) $4x^3 - 3x + 1 = 0$
(v) $x^3 + 5x^2 + 9x + 5 = 0$

27. (i) $9x^4 - 6x^3 + 13x^2 + lx + m$ පරිපූර්ණ වර්ගයක් නම්, l හා m සොයන්න.
(ii) $9x^6 - 24x^5 + 34x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 12x + 4$ ප්‍රකාශනයේ වර්ගමූලය සොයන්න.
(iii) $16x^8 - 16x^6 + 8x^5 - 36x^4 - 4x^3 + 21x^2 - 10x + 25$ වර්ගමූලය සොයන්න.

28. විසඳන්න.
(i) $3^{2x+1} + 3^2 = 3^{x+3} + 3^x$
(ii) $(3 - 2\sqrt{2})^{x^2-2} + (3 + 2\sqrt{2})^{x^2-2} - 6 = 0$
(iii) $4^x - 5 \times 2^x + 4 = 0$
(iv) $4^x + 6^x = 9^x$

29. විසඳන්න.
(i) $\sqrt{5x^2 - 6x + 8} - \sqrt{5x^2 - 6x - 7} = 1$
(ii) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x-2)(x-3) = 1$
(iii) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x+21} = \sqrt{6x+40}$
(iv) $x(x+2)(x^2-1) = -1$
(v) $3^{2x^2-7x+7} = 4$

30. (i) $x^4 + 5x^3 + 2x + 1$; $(x-1)^2$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(ii) $3x^5 + 7x^4 - 10x^3 + 2$; $(x+1)^2$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(iii) $x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 8$; $(x-2)^2$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(iv) $x^4 + 6x^3 + ax + b$ ප්‍රකාශනය $(x-1)^2$ න් බෙදූ විට ශේෂය $5x + 7$ නම් a, b සොයන්න.

31. පහත ඒවා රේඛීය සාධකවලට වෙන් කරන්න.
(i) $x^2 + xy - 6y^2 + 4x + 7y + 3$
(ii) $x^2 + 2xy - 8y^2 + 4x - 2y + 3$
(iii) $3x^2 - 5xy - 2y^2 - 2x - 3y - 1$
(iv) $2x^2 - 9xy - 5y^2 + 22x + 20$
(v) $12x^2 + 7xy - 12y^2 + 50y - 48$

32. පහත ඒවා රේඛීය සාධක දෙකකට වෙන්කළ හැකි වන සේ k සොයන්න. (k - නියතයකි.)
(i) $x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - 5y + k$
(ii) $5x^2 + 13xy - 6y^2 - 7x + 13y + k$
(iii) $2x^2 + kxy + 3y^2 - 5y - 2$
(iv) $3x^2 + kxy + 2y^2 - 2x + y - 1$
(v) $2x^2 - xy - y^2 - kx + 6y - 5$

33. සාධක වෙන් කරන්න.

(i) $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$

(ii) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

(iii) $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$

(iv) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

(v) $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$

(vi) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

(vii) $x^3+y^3+z^3-3xyz$

(viii) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

(ix) $(\alpha+\beta+\gamma)-\alpha^5-\beta^5-\gamma^5$

(x) $(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5$

මිශ්‍ර ගැටළු

34. x යනු $f(x)$ නම් බහුපද ශ්‍රිතයේ සාධකයක් වේ. $f(x)-f(x-1)=3x^2+5x$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇත්නම්, එම අර්ථ දැක්වීම භාවිතයෙන් $(x+1)$, $f(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. තවද $f(x)$, $(x+2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය -8 වේ. $(x-1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න. එනයින් $f(x)$ නිර්ණය කරන්න.

35. x^3+Ax^2+Bx+C ප්‍රකාශනයේ (x^2+2) සාධකයක් වන අතර, $(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 6 වේ. A, B, C සොයන්න.

36. $f(x)$ යනු 3 වෙනි මාත්‍රයේ බහු පදයකි. එය $(3x^2+1)$ න් බෙදූ විට ශේෂයක් ඉතිරි නොවේ. බහුපදය $(x-1)^2$ න් බෙදූ විට $16x-12$ ක ශේෂයක් ඉතිරි වේ. $f(x)$ සොයන්න.

37. $f(x)$ බහුපදය (x^2-a^2) න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න. එනයින් $f(x)=x^5+kx^2+2$ නම්, $f(x)$; (x^2-1) න් බෙදූ විට ශේෂයේ නියත පද අඩංගු නොවේ නම්, k හි අගය සොයන්න.

38. (i) $f(x)=2x^3-x^2-2x+k$ වේ. මෙහි k යනු නිශ්ශූන්‍ය නියතයකි. $(x-k)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් නම්, k හි අගය සොයන්න.

(ii) k හි එම අගය සඳහා $f(x)$ රේඛීය සාධක 2 ක ගුණිතයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

(iii) $f(x)\equiv(x-a)(2x+1)(x-1)+bx+c$ වන පරිදි a, b, c වල අගයන් සොයන්න.

39. $f(x)\equiv ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ ශ්‍රිතය (x^2+2) න් බෙදූ විට ශේෂය, $(d-2b)x+(4a-2c+e)$ බව පෙන්වන්න.

40. $f(x)$ බහුපදය $(x-a)(x-b)(x-c)$ තෙන් බෙදූ විට ශේෂය, $A(x-b)(x-c)+B(x-c)+C$ ආකාරයට ලැබෙන බව ශේෂ ප්‍රමේයය නැවත නැවත යෙදීමෙන් පෙන්වන්න.

41. $3x^2-5xy+2y^2+\lambda x+3y-2$ ප්‍රකාශනය රේඛීය සාධක දෙකක ගුණිතයක් වීම සඳහා λ ට තිබිය හැකි අගයන් සොයන්න. λ හි එම අගයන් සඳහා රේඛීය සාධක ලියා දක්වන්න.

42. p, r ශූන්‍ය නොවන q තාත්ත්වික නියත විට, $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ සහ
$g(x) = x^3 + rx^2 + qx + p$ යන ඝනජ බහු පද 2 කට පොදු වර්ගජ සාධකයක් තිබීමට අවශ්‍යතාවය,
$p = -r$ හා $p = -1$ විය යුතු බව පෙන්වන්න. එමගින්, $x^6 - 9x^4 - x^2 + 9 = 0$ හා
$9 + x^2 - 9x^4 - x^6 = 0$ සමීකරණ විසඳන්න.

43. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ හි මූලයක් α වේ. $ax^3 + 2bx^2 + 4cx + 8d = 0$ හි 2α මූලයක් බව පෙන්වන්න. එනයින් $x^3 - 112x + 384 = 0$ හි මූල සොයන්න.

44. $ax^4 - 6x^3 + bx^2 - cx + 28$ බහුපදය $(x-2)^2$ න් හරියටම බෙදේ. $(x+8)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 36 වේ. එම අගයන් ගන්නා විට බහුපදය $(x-1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

45. $(5 + 2\sqrt{6})^{x^2-3} + (5 - 2\sqrt{6})^{x^2-3} = 10$ විසඳන්න.

46. $6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0$ විසඳන්න.

47. $f(x) = x^4 - 10x^2 + p$ හි $(x^2 - 1)$ සාධකයක් නම්, p හි අගය සොයන්න. p හි එම අගයට අනුරූප $f(x)$ හි සාධක සියල්ල සොයන්න. එමගින් $2x^8 - 20x^4 + 18 = 0$ හි විසඳුම් සොයන්න.

48. $f(x)$ ශ්‍රිතයට පුනරාවර්තන සාධකයක් ඇත්නම්, එම සාධකය $f^1(x)$ වල සාධකයක් බව පෙන්වන්න. $x^3 - 5x^2 + 7$, $(x-1)^2$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

49. $f(x, y) = 6x^2 + axy + 6y^2 - 10y - 24$ බහුපදය රේඛීය සාධක 2 කට වෙන් කරවීම සඳහා a සොයන්න.

50. $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$ සාධක වෙන් කරන්න.

51. $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ හි සාධක සොයන්න.

52. $[x - (P + Q)]$ යනු $x^3 - 3PQx - (P^3 + Q^3)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.
එනයින් $x^3 - 6x - 6 = 0$ හි තාත්ත්වික මූලයන් සොයන්න.

53. බහුපද ප්‍රකාශන පිළිබඳ සාධක ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.
$f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$ වේ. මෙම බහුපදය $(x+1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 5 ක් වේ.
එනයින් $f(x) - 5$ හි සාධකයක් අපෝහනය කරන්න. $f(x) - 5$ බහුපදය ඒකජ සාධකවල ගුණිතයක් ලෙස ලියන්න.

54. $2x^3 + 3x^2 + ax - 60$ බහුපදයේ $(x+2)$ සාධකයකි. a හි අගය සොයා, බහුපදය ඒකජ සාධක 3 ක ගුණිතයක් ලෙස ලියා දක්වන්න. බහුපදය ධන නොවන්නා වූ x හි පරාසය ලියන්න.

55. $f(x)$ වර්ගජ ශ්‍රිතය $(x-2)$, $(x-1)$, $(2x+1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂ පිළිවෙලින් $-5, -6, 0$ වේ. $g(x)$ යනු හතරවන මාත්‍රයේ ශ්‍රිතයක් විට $f(x)$ යනු $g(x)$ වල සාධකයක් වේ. $g(x)$ ට පුනරාවර්තන සාධක ඇත. $(x-2)^2$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $-3(x+13)$ නම්, $g(x)$ සොයන්න.

56. $f(x)$ යනු $x^3 + 3x^3 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ බහුපද ශ්‍රිතයක් වන විට,

(i) $(x-1)$ හෝ $(x+1)$; $f(x)$ වල සාධකයක් නොවන බව පෙන්වන්න.

(ii) $f(x)$ යන්න (x^2-1) වලින් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(iii) $f(x)$ යනු x^2+1 වලින් බෙදූ විට ශේෂය 2 වන බව පෙන්වා, මෙයින් $f(x) - 2$ වල ඒකජ සාධකයක් සොයන්න.

57. $x + \frac{1}{x} = t$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ හි මූල සොයන්න.

58. (i) $x^2 + 2$ යනු $x^4 - 6x^2 + p$ හි සාධකයකි. p නියතය සොයන්න. එනයින් $x^4 - 6x^2 + p$ හි සාධක සොයන්න.

(ii) $x^3 - ax^2 + b$ සහ $x^4 - ax^3 + bx^2 + 4$ යන බහු පද දෙකටම පොදු සාධකයක් $(x+1)$ වේ. a සහ b නියත සොයන්න.

59. $ax^3 + bx^2 + cx + d$, $x^2 + k^2$න් ඉතිරි නැතිව බෙදෙයි නම්, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ බව පෙන්වන්න.

60. $P(x)$ යනු සහජ බහුපදයක් ද, $x^2 + x + 1$ මගින් $P(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $(2x+3)$ ද, $x(x+3)$ මගින් $P(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $5(x+1)$ ද වේ. $P(x)$ සොයන්න.

61. q ඔත්තේ නම්, $(x^p + 1)$ යනු $(x^{pq} + 1)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $x^{21} + 1$ හි සාධක තුනක් $(x+1)$, $(x^2 - x + 1)$, $(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ බව පෙන්වන්න.

62. $(x^3 + px + \gamma)$ සහ $(3x^2 + p)$ යන බහු පද දෙකටම පොදු ඒකජ සාධකයක් ඇත්නම් $\frac{p^3}{27} + \frac{r^2}{4} = 0$ බව පෙන්වන්න.

63. (i) $4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 24x + 16$ බහුපදය දෙවෙනි මාත්‍රයේ බහුපදයක පරිපූර්ණ වර්ගයක් බව පෙන්වන්න.

(ii) $x^4 - ax^3 - bx^2 - x + 1$ යන දෙවැනි මාත්‍රයේ බහු පදයක පරිපූර්ණ වර්ගයක් නම්, $a = c$ හා $b = \frac{a^2}{4} + 2$ බව පෙන්වන්න.

64. (i) $x - p$ යන්න $4x^3 - (3p+2)x^2 - (p^2-1)x + 3$ හි සාධකයක් වන p හි අගය සොයන්න. p ට අදාලව ප්‍රකාශනයේ ඉතිරි සාධක ද සොයන්න.

(ii) $a^3 + b^3 + c^3 + kabc$ යන්න $a + b + c$ වලින් බෙදේ නම්, k හි අගය සොයන්න.

(iii) $f(x) \equiv ax^3 + bx + c$ යන්න $x-2, x+1, x+3$ න් බෙදූ විට ශේෂය 1, 2 හා -4 වේ. a, b, c හි අගයන් සොයා $f(x) = 0$ විසඳන්න.

(iv) $(x-k)^2$ යන්න $x^3 + 3px + q$ හි සාධකයක් නම්, $4p^3 + q^2 = 0$ බව පෙන්වන්න.

65. $(x + b + c)$ යනු $x^3(b-c) - x(b^3 - c^3) + b^3c - bc^3$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. එහි ඉතිරි සාධක සොයන්න.

66. $f(x)$ යනු x හි 4 වන මාත්‍රයේ බහු පදයකි. $f(0) = 12$ වේ. $(x-2)$ යනු $f(x)$ හි දෙවරක් පුනරාවර්තන සාධකයක් වේ. $f(x)$ යන්න $(x^2 + 1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය $6 - 8x$ වේ. $f(x)$ සොයන්න.

67. $g(x)$ 4 වෙනි මාත්‍රයේ බහුපද ප්‍රකාශනයක් වේ. එය $(x^2 + 1)$ න් හරියටම බෙදේ. $g(x)$, $(x-1)^2$ $(x+1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය $-10x + 6$ නම්, $f(x)$ සොයන්න.

68. $f(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$ වේ. $f(x)$ යන්න $(x-1)(x+1)(x-2)$ න් හරියටම බෙදේ නම්, a, b, c නියත සොයා, ඉතිරි සාධකය ද සොයාගන්න. $2f(x+1) = x^2 + x - 2$ සමීකරණයද විසඳන්න.

69. $2x^3 + 3x^2 + cx - 60$ බහුපදයේ $(x+2)$ සාධකයකි. c හි අගය සොයා, බහුපදය ඒකජ සාධක තුනක ගුණිතයක් ලෙස ලියා දක්වන්න. බහු පදය ධන නොවන්නා වූ x හි පරාසය ලියන්න.

70. $x^4 + x^2 + x + 1 \equiv (x^2 + A)(x^2 - 1) + Bx + C$ සර්ව සාම්‍යය තෘප්ත කරන්නා වූ A, B, C අගයන් සොයන්න. එය භාවිතයෙන් 100010101 යන්න 9999 න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය සොයන්න.

71. $f(x)$ බහුපදය $(x-1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 2 වන අතර, $(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 3 වේ. $f(x)$ යන්න $(x-1)(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

72. $f(x)$ බහුපදය 3 වන මාත්‍රයේ බහු පදයක් වන අතර, x^3 හි සංගුණකය බව දී ඇත. -1 යනු $f(x) = 0$ සමීකරණයේ මූලයක් නම්, $f(x)$ බහුපදය සොයා, $f(x) = 0$ සමීකරණයට වෙනත් තාත්ත්වික මූල නොමැති බව පෙන්වන්න. $x^2 - x + 2$ න් බදූ විට $(5x - 7)$ ක ශේෂයක් ද, $x^2 + x - 1$ න් බෙදූ විට $(12x - 1)$ ක ශේෂයක් ද ලැබෙන පරිදි වූ x හි තුන්වන මාත්‍රයේ බහුපදය සොයන්න.

73. (i) ශේෂ ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

$f(x) = a_n x^n + a_{n1} x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 x + a_0$ යන බහුපද ශ්‍රිතය $x^n - h^2$ න් බෙදූ විට ශේෂය $\frac{1}{2}[f(h) - f(h)]\,x + \frac{1}{2}[f(h) - f(h)]$ බව පෙන්වන්න.